Jasno, g je dobro definisana, nenegativna, merljiva funkcija. Primenjujući Fatuovu lemu na niz funkcija $| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{n} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |, n \in \mathbf{N}$ dobijamo:

$$\int_X | g |^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{n} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |)^p d\mu,$$

odnosno

$$(\int_X | g |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty}(\|g_1\| + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|) \leq \|g_1\| + 1.$$

Dakle, ako je $E = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, onda $E \in \mathcal{M}$ i $\mu(E^c) = 0$, pa otuda red $| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |$ konvergira skoro svuda i funkcija $g\chi_E \in L^p(X)$. Definišimo sada funkciju f na X sa

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}.$$

Kako je $| g_k | \leq \sum_{j=k}^{\infty} | g_{j+1} - g_j | \leq g$ i niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro svuda ka f, tada na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji $f \in L^p(X)$. Pošto važi $| f - g_k |^p \leq 2^p g^p$, na osnovu iste teoreme zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p = 0.$$

Dakle, niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f.

Treba još pokazati da čitav niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f. Iz činjenice da je niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev, zaključujemo da za $m \geq n(\varepsilon)$ i dovoljno veliko $k \in \mathbf{N}$ važi:

$$\int_X | f_m - g_k |^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Primenom Fatuove leme na prethodnu nejednakost dobijamo

$$\int_X | f_m - f |^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X | f_m - g_k |^p \, d\mu \leq \varepsilon^p, \; m \geq n(\varepsilon),$$

odakle sledi da niz (f_n) konvergira u $L^p(X)$ ka f. ∎

Specijalno, za $p = 2$, prostor $L^2(X)$ je Hilbertov a skalarni proizvod u njemu je dat sa $(f|g) = \int_X f\bar{g} \, d\mu$.

Propozicija 8.2. Neka je S skup jednostavnih merljivih funkcija s na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ za koje je $\mu(\{x \in X;\ s(x) \neq 0\}) < \infty$ i neka je $p \in [1, \infty)$. Skup S je gust u $L^p(X)$.